令和 3 年度 学力検査問題 数学 解答

$\boxed{1}$

(1) $x \geqq \dfrac{1}{10} \iff \log_{10} x \geqq -1 \ \cdots\cdots$ ①　　　$y \geqq \dfrac{1}{10} \iff \log_{10} y \geqq -1 \ \cdots\cdots$ ②

$x^2 y = 10 \iff 2\log_{10} x + \log_{10} y = 1 \ \cdots\cdots$ ③

③ より $\log_{10} y = 1 - 2\log_{10} x \ \cdots\cdots$ ④　なので，④, ② より

$1 - 2\log_{10} x \geqq -1 \iff \log_{10} x \leqq 1$　これと ① より $-1 \leqq \log_{10} x \leqq 1$

また，③ より $\log_{10} x = \dfrac{1}{2}(1 - \log_{10} y)$ なので，これと ① より

$\dfrac{1}{2}(1 - \log_{10} y) \geqq -1 \iff \log_{10} y \leqq 3$　これと ② より $-1 \leqq \log_{10} y \leqq 3$

答 $-1 \leqq \log_{10} x \leqq 1,\quad -1 \leqq \log_{10} y \leqq 3$

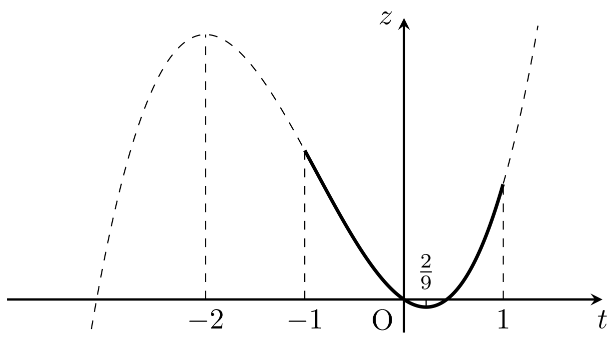
(2) $z = -4(\log_{10} x)(\log_{10} y) + 3(\log_{10} x)^3$　とおく。④ を代入して，

$$\begin{aligned} z &= -4(\log_{10} x)(1 - 2\log_{10} x) + 3(\log_{10} x)^3 \\ &= 3(\log_{10} x)^3 + 8(\log_{10} x)^2 - 4\log_{10} x \end{aligned}$$

よって，$\log_{10} x = t$ とおくと，$z = 3t^3 + 8t^2 - 4t \ (-1 \leqq t \leqq 1) \ \cdots\cdots$ ⑤

$\dfrac{dz}{dt} = 9t^2 + 16t - 4 = (9t-2)(t+2)$ なので，⑤ の増減表およびグラフは次のようになる。

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{2}{9}$	$\cdots$
$\frac{dz}{dt}$	$+$	0	$-$	0	$+$
z	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



ここで，$t = -1$ のとき $z = 9$ であり，$t = 1$ のとき $z = 7$ である。

よって，z は，$t = -1$ のとき最大値 9 をとる。

ここで，$t = -1$ となるのは $\log_{10} x = -1$, $\log_{10} y = 3$ のとき，すなわち $x = \dfrac{1}{10}$, $y = 1000$ のときである。

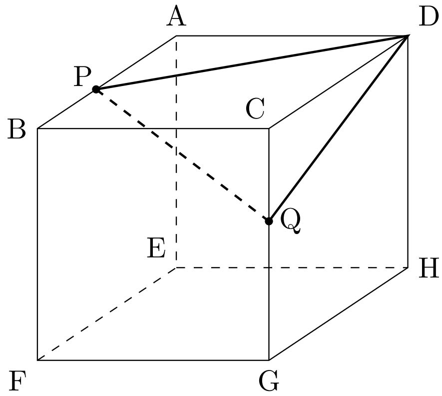
また，z は，$t = \dfrac{2}{9}$ のとき最小値 $z = 3\left(\dfrac{2}{9}\right)^3 + 8\left(\dfrac{2}{9}\right)^2 - 4 \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{8 + 96 - 216}{243} = -\dfrac{112}{243}$

をとる。ここで，$t = \dfrac{2}{9}$ となるのは $\log_{10} x = \dfrac{2}{9}$, $\log_{10} y = \dfrac{5}{9}$ のとき，すなわち

$x = 10^{\frac{2}{9}}$, $y = 10^{\frac{5}{9}}$ のときである。

答 $\begin{cases} \text{最大値 } 9 & \left(x = \dfrac{1}{10},\ \ y = 1000\right) \\ \text{最小値 } -\dfrac{112}{243} & \left(x = 10^{\frac{2}{9}},\ \ y = 10^{\frac{5}{9}}\right) \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{2}}$



(1)

点 D を原点とし，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ がそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正方向となるように，xyz 座標を定める。このとき，

$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=(1,\ \sqrt{3},\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=(\sqrt{3},\ 0,\ \alpha)$

ここで，$\angle\mathrm{PDQ}=\theta$ とすると，

$\triangle\mathrm{DPQ}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\,\mathrm{DP}\cdot\mathrm{DQ}\ \sin\theta=\frac{1}{2}\,\mathrm{DP}\cdot\mathrm{DQ}\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{DP}^2\cdot\mathrm{DQ}^2-(\mathrm{DP}\cdot\mathrm{DQ}\ \cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right)^2}\quad\cdots\cdots\ ①$$

となる。ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|^2=1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+0^2=4$,　$\left|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right|^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+0^2+\alpha^2=\alpha^2+3$,

$\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=1\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 0+0\cdot\alpha=\sqrt{3}$　なので，これらを ① に代入して，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{4\left(\alpha^2+3\right)-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+9}$$

(2) 四面体 CDPQ の体積を V とする。$\triangle\mathrm{CDP}$ を底面とみると

$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{CDP}\times\mathrm{CQ}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{3}\right)\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha$　一方で，$\triangle\mathrm{DPQ}$ を底面とみると，

$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{DPQ}\times\mathrm{CK}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+9}\right)h=\left(\dfrac{1}{6}\sqrt{4\alpha^2+9}\right)h$

したがって，$\dfrac{1}{2}\alpha=\left(\dfrac{1}{6}\sqrt{4\alpha^2+9}\right)h\ \Leftrightarrow\ h=\dfrac{3\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+9}}$

3

(1) 出る目の最大値が 5 以下となるのは，n 回とも 5 以下の目が出るときである。したがって，このようになる確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2)「出る目の最大値が 5 である事象」は，「n 回とも 5 以下の目が出る事象」から「n 回とも 4 以下の目が出る事象」を除いたものに一致する。したがって，このようになる確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(3) (2) と同様に考えて，「出る目の最大値が 5 であり，かつ最小値が 3 以上である事象」は，「n 回とも $3,4,5$ のいずれかの目が出る事象」から，「n 回とも $3,4$ のいずれかの目が出る事象」を除いたものに一致する。したがって，このようになる確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(4)「出る目の最大値が 5 であり，かつ最小値が 3 である事象」は，
「出る目の最大値が 5 であり，かつ最小値が 3 以上である事象」 $\cdots\cdots$ ① から，
「出る目の最大値が 5 であり，かつ最小値が 4 以上である事象」 $\cdots\cdots$ ② を除いたものに一致する。ここで，事象①の確率は，(3) より $\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n$

同様にして，事象②の確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。したがって，求める確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(5) 出る目の積が 15 で割り切れるための条件は，出る目の積が 3 で割り切れ，かつ 5 でも割り切れることである。そこで，「出る目の積が 3 で割り切れる事象」を A，「出る目の積が 5 で割り切れる事象」を B とすると，求める確率は，事象 $A\cap B$ の確率 $P(A\cap B)$ である。
一般に，余事象の確率やド・モルガンの法則，和事象の確率から，次が成立する。

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\\&=1-\left\{P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right\}\\&=1-P\left(\overline{A}\right)-P\left(\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\quad\cdots\cdots ③\end{aligned}$$

($\overline{A\cap B},\overline{A},\overline{B}$ は，それぞれ $A\cap B$, A, B の余事象を表す。）ここで，$\overline{A}$ は「出る目の積が 3 で割り切れない事象」を表すが，「出る目の積が 3 で割り切れない」ための条件は，「出る目が，全て 3 で割り切れない」ことである。したがって，$\overline{A}$ は「n 回とも $1,2,4,5$ のいずれかの目が出る事象」に一致するので，その確率は $P\left(\overline{A}\right)=\left(\frac{4}{6}\right)^n$ である。

同様に考えて，$\overline{B}$ は「n 回とも $1,2,3,4,6$ のいずれかの目が出る事象」に一致するので，その確率は $P\left(\overline{B}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^n$ である。また，$\overline{A}\cap\overline{B}$ も「n 回とも $1,2,4$ のいずれかの目が出る事象」に一致するので，その確率は $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\left(\frac{3}{6}\right)^n$ である。
これらを③に代入して，求める確率は

$$P(A\cap B)=1-\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\boxed{\textbf{4}}$

(1) $x>1$ のとき，

$$g(x)-f(x)=\left(2-\frac{1}{x}\right)-\left(-x^2+3x-1\right)=\frac{(2x-1)+\left(x^3-3x^2+x\right)}{x}$$
$$=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x}=\frac{(x-1)^3}{x}>0$$

よって，$f(x)<g(x)$

(2) $b_{n+1}=g\left(b_n\right)=2-\dfrac{1}{b_n}\quad(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ より，

$$b_2=2-\frac{1}{b_1}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3},\qquad b_3=2-\frac{1}{b_2}=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4},\qquad b_4=2-\frac{1}{b_3}=2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$$

以下，全ての自然数 n で $b_n=\dfrac{n+2}{n+1}$ $\cdots\cdots$ ① が成立することを，n についての数学的帰納法で証明する。

[I] $n=1$ のとき，$b_1=\dfrac{3}{2}=\dfrac{1+2}{1+1}$ より①は成立する。

[II] k を自然数とし，$n=k$ のとき①が成立すると仮定する。このとき $b_k=\dfrac{k+2}{k+1}$ なので，

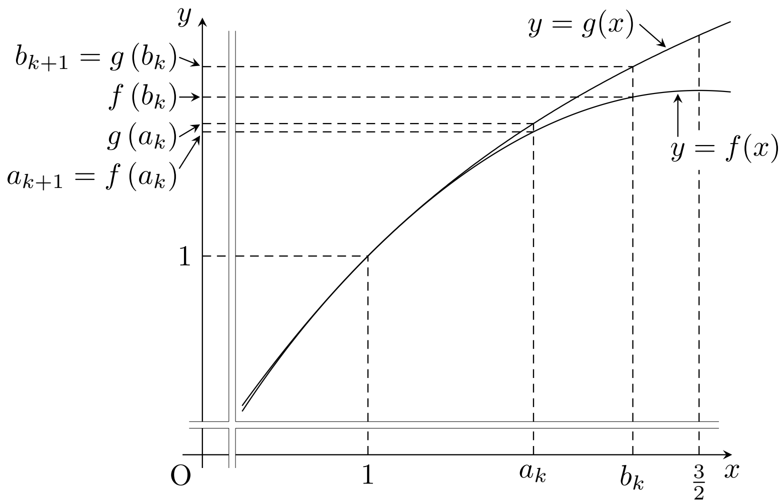
$$b_{k+1}=g\left(b_k\right)=2-\frac{1}{b_k}=2-\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+3}{k+2}=\frac{(k+1)+2}{(k+1)+1}$$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成立する。

[I], [II] から，数学的帰納法により，全ての自然数 n で $b_n=\dfrac{n+2}{n+1}$ が成立する。

（ $\boxed{\textbf{4}}$ の解答は，次ページに続く）

4 （前ページの続き）



(3) まず，$f(x) = -x^2 + 3x - 1 = -\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{4}$ より，$f(x)$ は $1 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ で単調増加である。

以下，2 以上の全ての自然数 n で $1 < a_n < b_n$ が成立することを，n についての数学的帰納法で証明する。

[I] $n = 2$ のとき，$a_2 = f(a_1) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{4}$ また，(2) より $b_2 = \dfrac{4}{3}$

$1 < \dfrac{5}{4} < \dfrac{4}{3}$ なので，$1 < a_2 < b_2$ は成立する。

[II] k を 2 以上の自然数とし，$1 < a_k < b_k$ が成立すると仮定する。このとき，

(2) より $b_k = \dfrac{k+2}{k+1} \leqq \dfrac{3}{2}$ なので，$1 < a_k < b_k \leqq \dfrac{3}{2}$

$f(x)$ は $1 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ で単調増加なので，

$$f(1) < f(a_k) < f(b_k) \quad \Leftrightarrow \quad 1 < a_{k+1} < f(b_k) \quad \cdots\cdots ②$$

が成立する。

また，$b_k > 1$ なので，(1) より $f(b_k) < g(b_k) = b_{k+1}$ ⋯⋯ ③ が成立する。

②，③より $1 < a_{k+1} < f(b_k) < b_{k+1}$ となるので，$1 < a_{k+1} < b_{k+1}$ が示された。

[I], [II] から，数学的帰納法により，2 以上の全ての自然数 n で $1 < a_n < b_n$ が成立する。

(4) (3) より $1 < a_n < b_n \ (n \geqq 2)$ である。また，(2) より

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

となる。よって，はさみうちの原理から $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

5

(1) 点 w が「点 1 を中心とする半径 1 の円の内部で中心以外」にあるための条件は，

$$0 < |w-1| < 1 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

である。$w = \dfrac{z+i}{z-i}$ を①に代入して，

$$0 < \left|\frac{z+i}{z-i} - 1\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \left|\frac{2i}{z-i}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{|2i|}{|z-i|} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < |z-i|$$

したがって，z は，i を中心とする半径 2 の円の外部を動く。（答の図はこのページの下）

(2) 点 $w = \dfrac{z+i}{z-i}$ が「原点を始点とする偏角 $\dfrac{\pi}{3}$ の半直線上（原点を含む）」にあるための条件は，ある 0 以上の実数 r を用いて $\dfrac{z+i}{z-i} = r\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) \cdots\cdots$ ② と表せることである。$z = x+yi$（x, y は実数）とすると，

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} = \frac{\{x+(y+1)i\}\{x-(y-1)i\}}{\{x+(y-1)i\}\{x-(y-1)i\}} = \frac{\left(x^2+y^2-1\right)+2xi}{x^2+(y-1)^2}$$

なので，

$$\text{②} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(x^2+y^2-1\right)+2xi}{x^2+(y-1)^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)r \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} = \dfrac{1}{2}r \\ \dfrac{2x}{x^2+(y-1)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r \end{cases}$$

ここで，つねに $x^2+(y-1)^2 \geqq 0$ なので，このような 0 以上の実数 r が存在するための条件は，

$$x^2+y^2-1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2x \ \cdots \text{③} \quad \text{かつ} \quad 2x \geqq 0 \ \cdots \text{④} \quad \text{かつ} \quad x^2+(y-1)^2 \neq 0 \ \cdots \text{⑤}$$

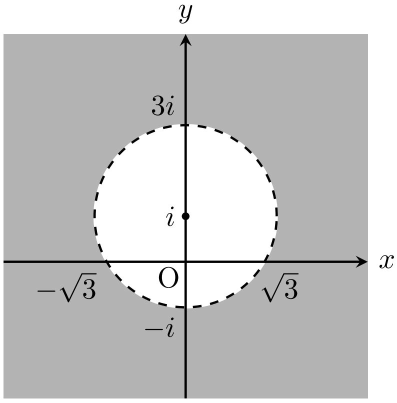
である。ここで，

$$\text{③} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left|z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left|z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{④} \quad \Leftrightarrow \quad x \geqq 0$$

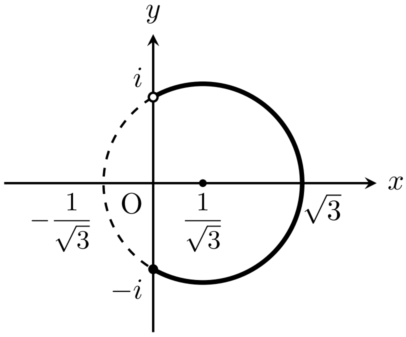
$$\text{⑤} \quad \Leftrightarrow \quad (x,\ y) \neq (0,\ 1) \quad \Leftrightarrow \quad z \neq i$$

なので，$z = x+yi$ が描く図形は，「点 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を中心とする半径 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の円のうち，実部が 0 以上で，かつ $z \neq i$ の部分」である。



上の図の色付き部分（境界線は含まない）

(1) の答



上の図の太線部分

（ただし，$-i$ は含むが，i は含まない）

(2) の答